COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 64/64
16 Dicembre 1964.

M. Bassetti: CONSIDERAZIONI SUL CROMATISMO DI UN CANALE MAGNETICO RETTILINEO. -

(Nota interna n. : 268)

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

LNF-64/64

Nota interna n.: 268
16 Dicembre 1964

M. Bassetti: CONSIDERAZIONI SUL CROMATISMO DI UN CANALE MAGNETICO RETTILINEO.

Consideriamo l'equazione differenziale

(1) $$x''(s) + k(s)x(s) = 0$$

ove con l'apice indichiamo la derivata fatta rispetto a s.

Tale equazione, come ben noto, è adatta a tradurre il moto di una particella lungo un canale magnetico, in un piano passante per l'asse del sistema, lungo il quale è calcolato s, ascisse curvilinea ed ove si intende, con x lo scostamento dall'asse della particella e con K(s) la funzione che descrive in funzione di s l'andamento delle forze di richiamo o di repulsione di natura magnetica.

E' bene precisare che limitiamo le nostre considerazioni a canali magnetici rettilinei costituiti da quadrupoli e tratti dritti escludendo di proposito i magneti le cui proprietà cromatiche sono di tutt'altro tipo. Supponiamo inoltre che tutti i quadrupoli siano allineati in modo da non dar luogo ad accoppiamenti tra i due modi che si svolgono nei due piani perpendicolari tra loro.

Un cambiamento dell'energia della particella che percorre il canale, o della corrente che alimenta i quadrupoli possono essere considerati una perturbazione indipendente da s della funzione K(s). E' utile quindi fare uno studio perturbativo dell'equazione

(2) $$x'' + k(1+\eta)x = 0$$

in funzione del parametro $\eta$.

Il problema della stabilità in energia o corrente al I° ordine può allora essere posto così:

Assegnato un tratto di lunghezza L quali condizioni deve soddisfare la funzione K(s) perché risulti

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{s=L} = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\partial x'}{\partial \eta}\right)_{s=L} = 0$$

per qualunque valore di x(o) e x'(o)?

Come è noto i valori di x e x' nei punti s = o e s = L sono legati tra loro da una relazione lineare del tipo

$$(4) \qquad \begin{aligned} x(L) &= a_{11}\, x(0) + a_{12}\, x'(0) \\ x'(L) &= a_{21}\, x(0) + a_{22}\, x'(0) \end{aligned}$$

ove i coefficienti $a_{ij}$ dipendono da $\eta$ ma non da x(o) e x'(o). L'ipotesi che valgano le (3) equivale anche a scrivere

$$(5) \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial \eta} = 0 , \qquad\qquad i,j = 1,2$$

Delle quattro condizioni espresse dalla (5) soltanto 3 sono indipendenti perché gli $a_{ij}$ sono legati dalla relazione (teorema di Liouville)

$$(6) \qquad a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 1 .$$

## SOLUZIONE PERTURBATIVA DELLA (2).

Siano

$$(7) \qquad x_i \qquad\qquad i = 1,2$$

due soluzioni linearmente indipendenti dall'equazione imperturbata (1). Poniamo

$$(8) \qquad x_i^* = x_i + \eta y_i$$

per le due soluzioni perturbate. Trascurando termini di ordine superiore otteniamo per $y_i$ l'equazione

$$(9) \qquad y_i'' + k y_i = - k x_i$$

Di quest'equazione noi vogliamo studiare le soluzioni con condizioni iniziali

(10) $$y_i = 0 \qquad y_i' = 0$$

poiché le condizioni iniziali da imporre alle $x_i^*$ sono le stesse delle $x_i$.

Il secondo membro della (9) può scriversi

(11) $$k(s)\, x_i(s) = \int_0^L k(s')\, x_i(s')\, \delta(s-s')\, ds' \qquad 0 \leq s \leq L$$

La soluzione della (9) può allora scriversi come integrale delle soluzioni del l'equazione (la funzione di Green)

(12) $$\varphi'' + k\varphi = \delta(s-s')$$

con condizioni iniziali

(13) $$\left.\begin{aligned} \varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{per} \quad s \leq s'$$

perché dalle (13) ne conseguono le (10).

La soluzione della (12) è

(14) $$\varphi(s) = u(s-s')\, \frac{x_2(s')\, x_1(s) - x_1(s')\, x_2(s)}{x_2(s')\, x_1'(s') - x_1(s')\, x_2'(s')}$$

Per la soluzione della (9) otteniamo allora attraverso le (11), (12),

(14) $$y_i(s) = -\int_0^s k(s')\, x_i(s')\, u(s-s')\, \frac{x_2(s')\, x_1(s) - x_1(s')\, x_2(s)}{x_2(s')\, x_1'(s') - x_1(s')\, x_2'(s')}\, ds'$$

Tramite la (1) è facile verificare che il denominatore dell'integrando è un invariante del moto per cui possiamo scrivere (la $u(s-s')$ è inessenziale!)

(15) $$y_i(s) = c\int_0^s k(s')\, x_i(s') \left[ x_2(s')\, x_1(s) - x_1(s')\, x_2(s) \right] ds'$$

con

(16) $$c = -\frac{1}{x_2(s')\, x_1'(s') - x_1(s')\, x_2'(s')}$$

Per la perturbazione $\eta\, y(s)$ di una qualsiasi soluzione

$$x(s) = a\, x_1(s) + b\, x_2(s)$$

combinazione lineare di $x_1(s)$ e $x_2(s)$ che formano sistema completo otteniamo

$$y(s) = a\, y_1(s) + b\, y_2(s)$$ e per la (15)

$$y(s) = c\left\{x_1(s)\int_0^s K(s')\left[a x_2(s') x_1(s') + b\, x_2^2(s')\right] ds' - x_2(s)\int_0^s K(s')\left[b\, x_2(s') x_1(s') + a\, x_1^2(s')\right] ds'\right\}$$

e per la derivata

$$y'(s) = c\left\{x_1'(s)\int_0^s K_1'(s)\left[a x_2(s') x_1(s') + b x_2^2(s')\right] ds' - x_2'(s)\int_0^s K(s')\left[b x_2(s') x_1(s') + a x_1^2(s')\right] ds'\right\}$$

Per s = L posto

$$A_{11} = \int_0^L K(s)\, x_1^2(s)\, ds$$

(18) $$A_{12} = \int_0^L K(s)\, x_1(s)\, x_2(s)\, ds$$

$$A_{22} = \int_0^L K(s)\, x_2^2(s)\, ds$$

otteniamo

$$y(L) = c\left\{a\left[A_{12} x_1(L) - A_{11} x_2(L)\right] + b\left[A_{22} x_1(L) - A_{12} x_2(L)\right]\right\}$$

$$y'(L) = c\left\{a\left[A_{12} x_1'(L) - A_{11} x_2'(L)\right] + b\left[A_{22} x_1'(L) - A_{12} x_2'(L)\right]\right\}$$

Imporre le (3) per qualsiasi a e b significa che deve risultare

$$A_{12} x_1(L) - A_{11} x_2(L) = 0$$

(20) $$A_{12} x_1'(L) - A_{11} x_2'(L) = 0$$

$$A_{22} x_1(L) - A_{12} x_2(L) = 0$$

(21) $$A_{22} x_1'(L) - A_{12} x_2'(L) = 0$$

Se supponiamo $A_{ij} \neq 0$ affinché le (20) e (21) siano soddisfatte deve essere nullo il determinante associato, cioè deve essere

(22) $$x_1(L)\, x_2'(L) - x_1'(L)\, x_2(L) = 0$$

ma ciò non può essere perché la (22) equivale a dire che le due soluzioni $x_1$ e $x_2$ sono linearmente dipendenti contrariamente all'ipotesi fatta inizialmente (7).

Perché le (20) e (21) siano soddisfatte deve essere dunque

$$A_{11} = A_{12} = A_{22} = 0$$

cioè per le (18)

(23)
$$\int_0^L k(s)\, x_1^2(s)\, ds = 0$$
$$\int_0^L k(s)\, x_1(s)\, x_2(s)\, ds = 0$$
$$\int_0^L k(s)\, x_2^2(s)\, ds = 0$$

Le (23) sono condizioni necessarie e sufficienti perché per qualsiasi soluzione della (1) debba risultare

(24
$$\int_0^L k(s)\, x^2(s)\, ds = 0$$

Infatti la (24) è una combinazione lineare delle (23).

CONSEGUENZE DELLA (24).

Moltiplicando la (1) per x e integrando da o a L si ricava

$$\int_0^L x x'' ds + \int_0^L k\, x^2 ds = 0$$

la condizione d'acromatismo (24) diviene perciò

(24 bis)
$$\int_0^L x x'' ds = 0$$

e integrando per parti

$$x(L)x'(L) - x(0)x'(0) - \int_0^L x'^2 ds = 0$$

Dalla (1) si ricava che se

(25)
$k(s) = 0$ deve essere
$x' = cost$ e in particolare può essere
$x' = 0$

In tutti gli altri casi è

(26)
$$\int_0^L x'^2 ds > 0$$

per cui come conseguenza della (24) deve essere

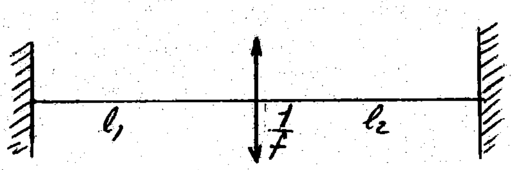
(27) $$x(L)\,x'(L) - x(0)\,x'(0) > 0$$

che tramite la matrice definita nella (4) si scrive

(28) $$a_{11}a_{21}x^2(0) + 2a_{12}a_{21}x(0)\,x'(0) + a_{12}a_{22}x'(0)^2 > 0$$

Cioè, per qualsiasi scelta di x(o) e x'(o), il I° membro della (28) deve essere una forma quadratica definita positiva. Essa è definita non negativa soltanto nel caso della (25). Dalla (28) (v. App. I) si può trarre la seguente conclusione: "Perché una matrice relativa ad un certo canale di trasporto possa essere acromatica deve avere i quattro elementi tutti dello stesso segno e diversi da zero".

Il risultato pratico più importante è il seguente: calcoliamo la matrice di un sistema di trasporto così costituito




(29) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\frac{l_2}{f} & l_1+l_2-\frac{l_1 l_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{l_1}{f} \end{vmatrix}$$

se $l_1$ $l_2$ e f sono legati dalla relazione che lega oggetto e immagine reali di un sistema ottico cioè

(30) $$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f}$$

risulta dalla (29)

$$a_{12} = 0$$

ma ciò non può avvenire per un sistema acromatico quindi: "Un sistema di trasporto rettilineo che dia di un oggetto un'immagine reale non può essere acromatico".

Per dedurre altre conseguenze di minor rilievo notiamo anzitutto che l'eventuale segno negativo comune a tutti e quattro gli elementi di matrice può mettersi in evidenza scomponendo la matrice nel prodotto della matrice identità moltiplicata per (-1) e una matrice che ha gli stessi elementi della prima cambiati di segno, cioè positivi.

La matrice identità negativa corrisponde ad una semplice riflessione.

Per la matrice a elementi positivi interpretiamo la (29) come la scomposizione di una matrice qualsiasi nel prodotto di un tratto dritto, una lente sottile ed un secondo tratto dritto. Deduciamo allora dalla (29)

(31) $$f = -\frac{1}{a_{21}} < 0$$

cioè la lente sottile del sistema equivalente è sempre divergente. Inoltre poiché in App. I si dimostra che la traccia è maggiore di 2, dalla (29) deduciamo ancora

$$2 - \frac{\ell_1 + \ell_2}{f} > 2$$

cioè poiché per la (31) f è negativo

(32) $$\ell_1 + \ell_2 > 0$$

A conclusioni simili è pervenuto E. Regenstreif[1] il quale tuttavia s'è limitato al caso meno generale di approssimazione di lente sottile, inadeguata tra l'altro a trattare l'es. dell'App. II.

Resta da vedere se esistono scelte della K(s) che rendono il sistema effettivamente acromatico. Nell'App. II mostriamo un tipo possibile di soluzione nelle quali le (23) e la (24) sono soddisfatte.

In ogni caso è accertato che per diminuire il cromatismo di un canale occorre diminuire il valore di $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{22}$.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare l'Ing. F. Amman per molte utili discussioni.

BIBLIOGRAFIA

(1) - E. Regenstreif, CERN 64-2. Cromatic aberrations in quadrupole multiplets.

^^^^^^^^^^^^^^

APPENDICE I

Passando a coordinate polari

$$x(o) = \rho \cos \theta$$

$$x'(o) = \rho \operatorname{sen} \theta$$

la (28) equivale successivamente a

$$a_{11} a_{21} \cos^2\theta + a_{12} a_{21} \operatorname{sen} 2\theta + a_{12} a_{22} \operatorname{sen}^2\theta > 0$$

$$\frac{a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}}{2} + \left[\left(\frac{a_{11} a_{21} - a_{12} a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2 a_{21}^2\right]^{1/2} \cos(2\theta + \delta) > 0$$

Ove il valore di $\delta$ è inessenziale. Poiché il coseno nell'ultima espressione può avere valori sia positivi che negativi deve essere

$$\frac{a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}}{2} > \left[\left(\frac{a_{11} a_{21} - a_{12} a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2 a_{21}^2\right]^{1/2} > 0$$

che tramite la (6) può scriversi

$$\frac{a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}}{2} > \left[\left(\frac{a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}}{2}\right)^2 - a_{12} a_{21}\right]^{1/2} > 0$$

La (28) equivale dunque alle due disuguaglianze

(A 1. 1) $$a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} > 0$$

(A 1. 2) $$a_{12} a_{21} > 0$$

Sostituendo nella (A 1. 1) $a_{22}$ con l'espressione che si ricava dalla (6) otteniamo

(A 1. 3) $$\frac{(a_{11}^2 + a_{12}^2) a_{21} + a_{12}}{a_{11}} > 0$$

Per la (A 1. 2) $a_{12}$ e $a_{21}$ devono avere lo stesso segno. Dalla (A 1. 3) si deduce che $a_{12}$ $a_{21}$ e $a_{11}$ devono avere lo stesso segno e ancora tramite la (6) che tutti e quattro gli elementi di matrice devono avere lo stesso segno.

Tramite quest'ultima proprietà possiamo dedurre che la traccia della matrice deve essere in valore assoluto maggiore di 2. Infatti per la (A 1. 2) e la (6) è

$$a_{11} a_{22} = 1 + a_{12} a_{21} > 1$$ cioè

$$a_{11} a_{22} > 1$$ che può scriversi

$$\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)>1$$

$$\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2-\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2>1$$

(A 1.4)

$$\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2>1$$

$$|a_{11}+a_{22}|>2$$

Consideriamo il caso particolare della (25). Fisicamente questa eventualità corrisponde ad un semplice tratto dritto senza forze presenti. Come ben noto la matrice corrispondente è

$$\begin{vmatrix} 1 & L \\ o & 1 \end{vmatrix}$$

E' fisicamente ovvio che questa matrice è acromatica e per quanto già detto è questo l'unico caso nel quale il 1° membro della (28) può annullarsi senza essere x(o) = x'(o) = o.

In tutti gli altri casi il 1° membro della (28) deve essere definito positivo e questa proprietà ci permette di escludere che possa essere nullo uno degli altri tre elementi $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ della matrice definita nella (4).

Infatti è facile verificare che se uno di essi fosse nullo, sarebbero possibili le seguenti scelte non banali di x(o) x'(o)

$$\begin{cases} a_{11} = o \\ x'(o) = o \\ x(o) \neq o \end{cases}$$

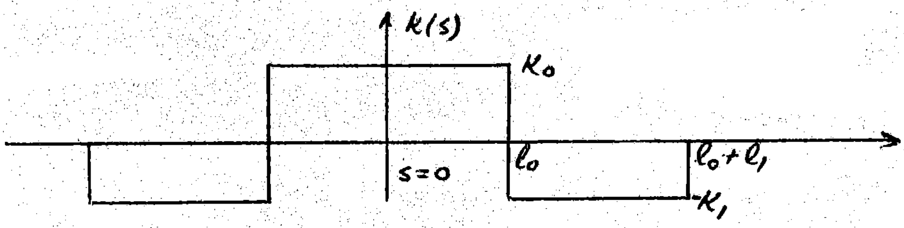
$$\begin{cases} a_{12} = o \\ x'(o) \neq o \\ x(o) = o \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{22} = o \\ x'(o) \neq o \\ x(o) = o \end{cases}$$

le quali renderebbero nullo il 1° membro della (28) contrariamente a quanto è stato dimostrato essere necessario per l'acromatismo della matrice.

APPENDICE 2

Scegliamo una funzione $k(s)$ che soddisfi queste condizioni




$K(s) = k(s)$

$K(s) = K_0 > 0$ per $0 \leq s \leq \ell_0$

$K(s) = -K_1 < 0$ per $\ell_0 < s \leq (\ell_0 + \ell_1)$

$K(s) = 0$ per $(\ell_0 + \ell_1) < s < \infty$

Vogliamo mostrare che un'opportuna scelta dei parametri a disposizione $K_0, K_1, \ell_0, \ell_1$ permette di realizzare un sistema acromatico.

Prendiamo come due soluzioni indipendenti quelle definite dalle condizioni a $s = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2' = 1 \end{cases}$$

Cambiando segno a s la K(s) rimane immutata, e la (1) rimane immutata di conseguenza; le condizioni iniziali della $x_1(s)$ rimangono immutate e quelle della $x_2(s)$ cambiano segno quindi:

$x_1(s)$ è pari

$x_2(s)$ è dispari e quindi

(A 2. 1) $$\int_{-(\ell_0+\ell_1)}^{(\ell_0+\ell_1)} K(s)\,x_1(s)\,x_2(s)\,ds = 0$$

Per l'acromatismo restano da soddisfare le altre due condizioni (23)

(A 2. 2) $$\int_0^{\ell_0+\ell_1} K(s)\,x_1^2(s)\,ds = 0$$

(A 2. 3) $$\int_0^{l_0+l_1} K(s)\, x_2^2(s)\, ds = 0$$

Nel tratto $0 < s < l_0$ le soluzioni della (1) sono

(A 2. 4) $$x_1(s) = \cos\sqrt{K_0}\, s$$

(A 2. 5) $$x_2(s) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{K_0}\, s}{\sqrt{K_0}}$$

e risulta

(A 2. 6) $$\int_0^{l_0} K_0\, x_1^2(s)\, ds = K_0 \int_0^{l_0} \cos^2\sqrt{K_0}\, s\, ds = K_0\left(\frac{l_0}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{K_0}\, l_0}{4\sqrt{K_0}}\right)$$

(A 2. 7) $$\int_0^{l_0} K_0\, x_2^2(s)\, ds = K_0 \int_0^{l_0} \frac{\operatorname{sen}^2\sqrt{K_0}\, s}{K_0}\, ds = \left(\frac{l_0}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{K_0}\, l_0}{4\sqrt{K_0}}\right)$$

all'estremo $s = l_0$ dalle (A 2. 4) (A.2. 5) otteniamo

$$\begin{cases} x_1(l_0) = \cos\sqrt{K_0}\, l_0 \\ x_1'(l_0) = -\sqrt{K_0}\operatorname{sen}\sqrt{K_0}\, l_0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_2(l_0) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{K_0}\, l_0}{\sqrt{K_0}} \\ x_2'(l_0) = \cos\sqrt{K_0}\, l_0 \end{cases}$$

Per $l_0 < s < (l_0 + l_1)$ la soluzione della (1) è

$$x_i = x_i(l_0)\cosh\sqrt{K_1}\,(s-l_0) + \frac{x_i'(l_0)}{\sqrt{K_1}}\operatorname{senh}\sqrt{K_1}\,(s-l_0)$$

e risulta

$$\int_{l_0}^{l_0+l_1} K(s)\, x_i^2(s)\, ds = -K_1\int_0^{l_1}\Big[x_i^2(l_0)\cosh^2\sqrt{K_1}\, s + \frac{2x_i(l_0)x_i'(l_0)}{\sqrt{K_1}}\cosh\sqrt{K_1}\, s\cdot\operatorname{senh}\sqrt{K_1}\, s +$$

$$+ \frac{x_i'^2(l_0)\operatorname{senh}^2\sqrt{K_1}\, s}{K_1}\Big]ds = -\Big\{\left[K_1 x_i^2(l_0) - x_i'^2(l_0)\right]\frac{l_1}{2} - \frac{x_i(l_0)x_i'(l_0)}{2} +$$

$$+ \left[\sqrt{K_1}\, x_i^2(l_0) + \frac{x_i'^2(l_0)}{\sqrt{K_1}}\right]\frac{\operatorname{senh} 2\sqrt{K_1}\, l_1}{4} + \frac{x_i(l_0)x_i'(l_0)}{2}\cosh 2\sqrt{K_1}\, l_1 .$$

Dalle (A 2. 2) (A 2. 3) (A 2. 6) (A 2. 7) otteniamo

$$\left[\frac{l_0}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\sqrt{K_0}\,l_0}{4\sqrt{K_0}}\right] = \left[\left(\frac{K_1}{K_0}\cos^2\sqrt{K_0}\,l_0 - \mathrm{sen}^2\sqrt{K_0}\,l_0\right)\frac{l_1}{2} + \frac{\cos\sqrt{K_0}\,l_0\,\mathrm{sen}\sqrt{K_0}\,l_0}{2\sqrt{K_0}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{K_1}}{K_0}\cos^2\sqrt{K_0}\,l_0 + \frac{\mathrm{sen}^2\sqrt{K_0}\,l_0}{\sqrt{K_1}}\right)\frac{\mathrm{sen}\,h_2\sqrt{K_1}\,l_1}{4} - \frac{\cos\sqrt{K_0}\,l_0\,\mathrm{sen}\sqrt{K_0}\,l_0}{2\sqrt{K_0}}\cos h\,2\sqrt{K_1}\,l_1\right]$$

$$\left[\frac{l_0}{2} - \frac{\mathrm{sen}^2\sqrt{K_0}\,l_0}{4\sqrt{K_0}}\right] = \left[\left(\frac{K_1}{K_0}\mathrm{sen}^2\sqrt{K_0}\,l_0 - \cos^2\sqrt{K_0}\,l_0\right)\frac{l_1}{2} - \frac{\cos\sqrt{K_0}\,l_0\,\mathrm{sen}\sqrt{K_0}\,l_0}{2\sqrt{K_0}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{K_1}}{K_0}\mathrm{sen}^2\sqrt{K_0}\,l_0 + \frac{\cos^2\sqrt{K_0}\,l_0}{\sqrt{K_1}}\right)\frac{\mathrm{sen}\,h\,2\sqrt{K_1}\,l_1}{4} + \frac{\cos\sqrt{K_0}\,l_0\,\mathrm{sen}\sqrt{K_0}\,l_0}{2\sqrt{K_0}}\cos h\,2\sqrt{K_1}\,l_1\right]$$

Dopo aver sommato e sottratto posto

(A 2.8) $\qquad t = \sqrt{K_0}\,l_0 \qquad y = \sqrt{K_1}\,l_1 \qquad z = \sqrt{\frac{K_1}{K_0}}$

si ottengono con un pò d'algebra le due relazioni

(A 2.9) $\qquad 2t = z\left(\frac{\mathrm{sen}\,h\,2y}{2} + y\right) + \frac{1}{z}\left(\frac{\mathrm{sen}\,h\,2y}{2} - y\right)$

(A 2.10) $\qquad \mathrm{tang}\,2t\,\cos h\,2y = z\left(\frac{\mathrm{sen}\,h\,2y}{2} + y\right) - \frac{1}{z}\left(\frac{\mathrm{sen}\,h\,2y}{2} - y\right)$

Poiché

$$\mathrm{sen}\,h\,2y = 2y + \frac{(2y)^3}{3!} + \ldots$$

è

$$\frac{\mathrm{sen}\,h\,2y}{2} - y > 0 \quad .$$

Di conseguenza essendo anche z positivo il 2º membro della (A 2.9) è maggiore di quello della (A 2.10). Deve essere dunque

(A 2.11) $\qquad 2t > \mathrm{tang}\,2t \cdot \cos h\,2y$

Attorno al punto x = o y = o non c'è soluzione perché

$$\frac{\mathrm{tang}\,2t}{2t} > 1$$

$$\cos h\,2y > 1$$

Ci può essere soluzione attorno ai punti

$2t = n\pi \qquad$ con n intero $\geq 1$

In particolare posto esattamente

$2t = n\pi$ le (A 2. 9) e (A 2. 10) divengono sommando e sottraendo

$$z\left(\frac{\operatorname{senh} 2y}{2} + y\right) = \frac{n\pi}{2}$$

$$\frac{1}{z}\left(\frac{\operatorname{senh} 2y}{2} - y\right) = \frac{n\pi}{2}$$

che possono anche scriversi

(A 2. 12)
$$\operatorname{senh} 2y = \frac{n\pi}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$2y = \frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{z} - z\right)$$

ed eliminato y

(A 2. 13)
$$\operatorname{senh} \frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{z} - z\right) = \frac{n\pi}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Per $z = 1$ il $1^o$ membro della (A 2. 13) è inferiore al $2^o$.

Per $z \to o$ il $1^o$ membro diventa definitivamente maggiore del $2^o$. Per continuità c'è quindi soluzione alla A per un valore di z compreso tra 0 e 1. Dalla (A 2. 12) si ricava infine il valore positivo di y che assieme al valore imposto di t danno una soluzione possibile al problema posto. Le (A 2. 8) permettono poi di risalire ai valori di $K_o$, $K_1$, $l_o$, $l_1$ fissandone ad arbitrio uno, ad es. $K_o$.

Dato il valore scelto per la variabile t, il tratto intermedio equivale ad una rotazione di $n\pi$, di matrice

$$(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{vmatrix}$$

Questa matrice commuta con qualsiasi altra e quindi la matrice totale è praticamente quella relativa ai due tratti di lunghezza $l_1$ cioè

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \cosh 2\sqrt{K_1}\, l_1 & \dfrac{\operatorname{senh} 2\sqrt{K_1}\, l_1}{\sqrt{K_1}} \\ \sqrt{K_1}\operatorname{senh} 2\sqrt{K_1}\, l_1 & \cosh 2\sqrt{K_1}\, l_1 \end{vmatrix}$$

che soddisfa alle proprietà dimostrate in App. I di avere i quattro elementi dello stesso segno e le traccie in valore assoluto maggiore di 2.